

Exercice 1

On remarque pour commencer que f est continue et même dérivable partout où elle est définie, car elle s'écrit sur chaque intervalle ouvert de son ensemble de définition comme un quotient de sommes de fonctions dérivables.

Commençons par regarder si on peut prolonger f par continuité en 0. Pour cela, étudions ses limites à droite et à gauche en 0, à l'aide de développements limités. Pour $x < 0$, on a

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) - x}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x))} = \frac{-\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)}.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/3}{-x^2/2} = 0$.

Étudions maintenant sa limite à droite : pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)) + 1}{x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - (x + x^2\varepsilon(x))} \\ &= \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + x^4\varepsilon(x) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)}{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} = \frac{-\frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon(x)}{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}. \end{aligned}$$

On en déduit comme plus haut que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. On peut donc prolonger f en une fonction continue en 0, en posant $f(0) = 0$. On a ainsi prolongé f par continuité sur \mathbf{R} .

Par ailleurs, on ne peut prolonger f par continuité en un point de Z autre que 0, car en un tel point f n'admet pas de limite finie (son dénominateur tend vers 0 alors que son numérateur tend vers une limite non nulle).

La fonction ainsi obtenue n'est pas dérivable en 0. En effet, en reprenant les développements effectués ci-dessus, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/3}{-x^3/2} = 2/3.$$

Or de l'autre côté on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4/8}{-x^3/2} = 0.$$

Ces deux limites ne coïncidant pas, f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2

1. Il suffit d'appliquer à f' le théorème des valeurs intermédiaires, vu que f' est supposée continue.

2. Sur \mathbf{R}^* , h est dérivable car c'est le produit d'une fonction dérivable par la composée de deux fonctions dérivables. Sa dérivée est donnée par $h'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$.

Étudions la dérivabilité de h en 0. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq}} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

car \sin est bornée que que le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend toujours vers 0 (théorème dit du sandwich, ou des gendarmes). Ainsi, h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

Par ailleurs, h' n'est pas continue en 0 car, autrement, elle y aurait eu une limite à droite vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(1/x) + \lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x) = 0 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos(t).$$

Exercice 3

1. Sur $]a, b]$, ϕ est continue car c'est un quotient de fonctions continues. Par ailleurs, par définition de la dérivée, il est clair que $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = f'(a)$. Ainsi, ϕ est aussi continue en a , donc est continue sur tout l'intervalle $[a, b]$.

2. On a immédiatement à partir des définitions $\psi(a) = (f(b) - f(a))/(b - a)$, $\psi(b) = f'(b)$, $\phi(a) = f'(a)$ et $\phi(b) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

3. On a par hypothèse $f'(a) \leq y \leq f'(b)$. Deux cas se présentent alors : soit y est inférieur à $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ soit il lui est supérieur. Dans le premier cas, on a $y \in [\phi(a), \phi(b)]$; dans le second, on a $y \in [\psi(a), \psi(b)]$.

4. On distingue à nouveau deux cas : puisque $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ n'est pas compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il est donc soit supérieur à $f'(b)$, soit inférieur à $f'(a)$. Dans le premier cas, on a $y \in [\phi(a), \phi(b)]$, dans le second $y \in [\psi(a), \psi(b)]$.

5. Les questions précédentes ont montré qu'on a toujours soit $y \in [\phi(a), \phi(b)]$, soit $y \in [\psi(a), \psi(b)]$. Dans le premier cas, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction ϕ , qui est continue sur $[a, b]$ pour trouver $d \in [a, b]$ tel que $\phi(d) = y$; dans le deuxième on l'applique à ψ pour trouver $e \in [a, b]$ tel que $\psi(e) = y$.

6. On suppose comme indiqué à la question précédente qu'on est dans le premier cas, à savoir qu'il existe $d \in [a, b]$ tel que $y = \phi(d) = \frac{f(d)-f(a)}{d-a}$. Or, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f dérivable sur $[a, d]$ dit précisément qu'il existe $c \in [a, d]$ tel que $f'(c) = \frac{f(d)-f(a)}{d-a}$. On a ainsi trouvé c dans $[a, d]$, donc dans $[a, b]$, tel que $f'(c) = y$.

Exercice 4

1. On introduit pour cela la fonction $g: [a, \frac{a+b}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $g(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x)$. On constate que g est continue, car f l'est. Par ailleurs, on calcule $g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2}) = -g(a)$. Selon le signe de $f(\frac{a+b}{2})$, on a donc soit $g(a) \leq 0 \leq g(\frac{a+b}{2})$, soit $g(\frac{a+b}{2}) \leq 0 \leq g(a)$. Dans les deux cas, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g et conclure qu'il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = f(c + \frac{a-b}{2})$.

2. Suivant l'indication, on introduit la fonction $x: [0, 60] \rightarrow \mathbf{R}$ qui à un temps t exprimé en minutes associe la distance en kilomètres $x(t)$ parcourue par le véhicule depuis son départ à ce moment. On peut bien supposer x continue, vu la physique de la situation (la voiture ne se téléporte pas...). On définit alors la fonction $f: [0, 60] \rightarrow \mathbf{R}$ par $f(t) = x(t) - t$. L'hypothèse que le véhicule parcourt 60 kilomètres en 60 minutes se traduit ainsi par $f(60) = 0$. Par ailleurs, on a bien sûr $f(0) = 0$.

On peut donc appliquer le résultat de la question précédente, et en déduire qu'il existe un instant c entre 0 et 30 minutes, tel que $f(c+30) = f(c)$, c'est-à-dire que $x(c+30) - (c+30) = x(c) - c$, soit finalement $x(c+30) = x(c) + 30$. Dans l'intervalle de 30 minutes $[c, c+30]$, la voiture a donc parcouru 30 kilomètres.

3. On ne peut pas généraliser autant. Par exemple, si le déplacement de la voiture est donné par la fonction $x(t) = t + \sin(2\pi t/60)$, on constate qu'il n'existe pas d'intervalle de 45 minutes où la voiture parcourt 45 km. En effet, en notant $[t_0, t_1]$ (où $t_1 = t_0 + 45$) un tel intervalle, on devrait avoir soit $t_0 = 0$ et on voit directement que $x(45) \neq x(0) + 45$, soit $t_0 \in]0, 15]$, donc $x(t_0) > t_0$, et $t_1 \in]45, 60]$, donc $x(t_1) \leq t_1$. On a ainsi $x(t_0) + 45 > t_0 + 45$ et $x(t_1) \leq t_0 + 45$, ce qui contredit l'hypothèse que $x(t_0) + 45 = x(t_0 + 45)$.

Par contre, on peut quand même généraliser un peu. Par exemple, on peut démontrer que, pour tout n entier, il existe toujours un intervalle de temps de $60/n$ minutes où le véhicule parcourt $60/n$ kilomètres. On peut montrer réciproquement que si T n'est pas de la forme $60/n$, il existe des parcours pour lesquels il n'y a aucun intervalle de T minutes où la voiture parcourt T kilomètres.

Une réponse aussi précise n'était pas forcément attendue, car il était difficile de deviner le résultat, même si sa démonstration reste à votre portée. Si vous avez passé du temps à chercher cette question, vous avez peut-être observé qu'il est plus dur (mais plus intéressant) de répondre à une question « ouverte », c'est-à-dire où l'on ne sait pas *a priori* quel est le résultat à démontrer.

Exercice 5

On a $\cotan'(x) = \frac{1}{\sin(x)^2}$.

Équation homogène associée

Soit $y_0(x)$ une solution de l'équation homogène associée, c'est-à-dire une fonction telle que $\sin(x)y_0'(x) - \cos(x)y_0(x) = 0$. On a alors $\sin(x)Ay_0'(x) - \cos(x)Ay_0(x) = A \cdot 0 = 0$ quelque soit $A \in \mathbf{R}$ ce qui prouve que $Ay_0(x)$ est également solution. La fonction sinus est solution de l'équation homogène (il suffit de le vérifier) donc $A \sin(x)$ est solution. C'est bien le seul type de solution car on peut réécrire l'équation différentielle comme

$$\frac{d \log(y_0)}{dx} = \cotan(x) = \frac{d \log(\sin(x))}{dx}$$

qui s'intègre en $\log(y_0) = \log(\sin(x)) + \text{Cste}$ soit

$$y_0(x) = \text{Cste} \cdot \sin(x)$$

Méthode de variation de la constante

On cherche y sous la forme $y(x) = A(x)y_0(x)$ (où l'on a choisi $y_0(x) = \sin(x)$). En dérivant l'expression de $y(x)$ et en l'insérant dans l'équation différentielle, on trouve

$$\sin(x)(A'(x)y_0(x) + A(x)y_0'(x)) + A(x)y_0(x)\cos(x) = 1$$

Compte tenu de l'équation homogène vérifiée par $y_0(x)$, deux termes se simplifient et il reste

$$1 = \sin(x)A'(x)y_0(x) = A'(x)\sin(x)^2$$

Grâce à la première question, il ressort que $A(x) = -\cotan(x) + \text{Cste}$. En insérant ce résultat dans la définition de $y(x)$ on trouve finalement

$$y(x) = (\text{Cste} - \cotan(x)) \sin(x)$$

La condition initiale détermine la constante : $y(\frac{\pi}{2}) = \text{Cste} = 1$ d'où $y(x) = (1 - \cotan(x)) \sin(x)$. La solution ne présente pas de singularité en est singulière pour $x = \frac{\pi}{2}$.