Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Devoir 1 (un corrigé)

Exercice 1

1. Comme cos et $x \mapsto |x|$ sont définies sur $\mathbf{R}$ tout entier, et que ln est définie sur $]0, +\infty[$, $f(x)$ est défini si et seulement si $|\cos(x)| > 0$, c'est-à-dire si $\cos(x) \neq 0$. Ainsi, le domaine de définition de f est $D_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

2. Pour tout x de D_f, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = -\ln(|\cos(-x)|) = -\ln(|\cos(x)|) = f(x)$, donc f est paire. Par ailleurs, on a aussi $x + \pi \in D_f$ si $x \in D_f$, et $f(x + \pi) = -\ln(|\cos(x + \pi)|) = -\ln(|-\cos(x)|) = f(x)$, c'est-à-dire que f est π-périodique.

Par périodicité, il suffit d'étudier f sur n'importe quel intervalle de longueur π, comme par exemple $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Par parité, il suffit ensuite d'étudier f sur la partie positive de cet intervalle symétrique par rapport à zéro, à savoir $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Sur cet intervalle, on a $f(x) = \ln(\cos(x))$.

3. Le danger est que $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en l'origine. Il y a donc deux façons de procéder pour prouver que f est partout dérivable :

1. Remarquer que si $x \in D_f$, alors $\cos(x) \neq 0$ et que $x \mapsto |x|$ est dérivable ailleurs qu'en 0. Comme de plus ln est dérivable partout où elle est définie, f est dérivable.
2. Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, f s'exprime sans valeur absolue. Elle est donc dérivable sur cette intervalle, car composée de fonctions dérivables. Par périodicité, elle est dérivable partout.

4. On peut utiliser une des deux méthodes suivantes au choix.

1. On connaît la dérivée de f, elle est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et même strictement positive sauf en zéro. f est donc strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
2. On remarque que f est composée d'une fonction strictement décroissante (cos), d'une fonction strictement croissante (ln), et enfin d'un fonction strictement décroissante ($x \mapsto -x$). Elle est donc strictement croissante.

5. Pour trouver les asymptotes, il suffit d'étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, à savoir en $\frac{\pi}{2} \mod \pi$, et en ∞. En $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x) = \lim_{x \to 0} (-\ln(x)) = +\infty \ .$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ admet pour asymptotes verticales la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Comme f est périodique non constante, f n'admet pas de limite en ∞. Les droites précédentes sont donc les seules asymptotes à $\mathcal{C}$.

6. On peut utiliser (exceptionnellement) une formule de TAYLOR vu qu'on développe à un ordre très faible, et qu'un changement de vriable serait délicat avec cos et ln. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)\varepsilon\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \tfrac{\ln(2)}{2} + x - \tfrac{\pi}{4} + \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)\varepsilon\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

On en déduit alors immédiatement l'équation de la tangente, à savoir $y = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4} + x$.

7. On va poser $u = \cos(x) - 1$ et développer $\ln(1+u)$. Comme le développement de u commence par un terme en x^2, on voit que le terme en u^3 donnera des termes d'ordre 6 et plus en x, et que les termes d'ordre supérieur seront donc inutiles. Il n'y a par contre aucun raison de développer cos à un ordre inférieur à 6, car le développement de $\ln(1+u)$ commence par un terme en u. On utilise donc :

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - u^2 + u^3 + u^3\varepsilon(u) \\ u = \cos(x) - 1 &= -\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \tfrac{x^6}{6!} + x^6\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Il ne reste alors qu'à subsituter la seconde expression dans la première.

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) &= -\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \tfrac{x^6}{6!} - \left(-\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24}\right)^2 + \left(-\tfrac{x^2}{2}\right)^3 + x^6\varepsilon(x) \\ &= -\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} - \tfrac{x^6}{6!} - \tfrac{x^4}{4} + \tfrac{x^6}{24} - \tfrac{x^6}{8} + x^6\varepsilon(x) \\ f(x) &= \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{12} + \tfrac{x^6}{45} + x^6\varepsilon(x) \end{aligned}$$

8. Voir les observations sur votre copie.

9. On a déjà vu que f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Par ailleurs, on sait que f est dérivable, elle est donc continue. Par ailleurs, on a $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty$. On peut donc appliquer le théorème de la bijection et conclre que f est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$.

10. La réciproque g de f est définie sur $[0, +\infty[$. Elle est dérivable en x si et seulement si f est dérivable en $g(x)$ et que $f'(g(x)) \neq 0$. Comme f est dérivable partout et que sa dérivée ne s'annule qu'en $0 = g(0)$, g est dérivable partout sauf en 0.

Pour calculer sa dérivée, on commence par remarquer qu'une expression de g est $g(x) = \arccos(e^{-x})$. On peut alors soit calculer g' directement, soit utiliser la formule de dérivation des fonctions réciproques.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \tfrac{1}{f'(g(x))} = \tfrac{\tan}{(} \arccos(e^{-x})) \\ &= \tfrac{\cos(\arccos(e^{-x}))}{\sin(\arccos(e^{-x}} \\ &= \tfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(e^{-x}}} = \tfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. On a $\tan^2(x) = 1 + \tan^2(x)$.

2. Ici, on va encore utiliser la formule de TAYLOR qui est la plus simple à l'ordre 1 aileurs qu'en 0. On calcule $\tan'(0) = 1$, $\tan'(\frac{\pi}{4}) = 2$, et $\tan'(\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \tan(x) = x + x\varepsilon(x) &= 1 + 2\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)\varepsilon\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{3} + (1+\sqrt{3})\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + \left(x - \tfrac{\pi}{3}\right)\varepsilon\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

3. Pour cette question et la suivante il est nécessaire de bien comprendre ce qui se passe au niveau des ordres de développement. Toute cette histoire marche uniquement parce le développement de tan en 0 commence par un terme d'ordre 1, c'est-à-dire qu'un développement de tan à l'ordre n fournit un développement de $\tan^2$ à l'ordre $n + 1$.

On calcule ainsi $\tan'(x) = 1 + (x + x\varepsilon(x))^2 = 1 + x^2 + x^2\varepsilon(x)$. On peut ensuite intégrer cette égalité ; la constante d'intégration est $\tan(0) = 0$. Il vient ainsi $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$.

4. On calcule successivement, en prenant garde à l'ordre :

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \left(x + \tfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right)^2 = 1 + x^2 + \tfrac{2x^4}{3} + x^4\varepsilon(x) \\ \tan(x) &= x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x) \\ \tan'(x) &= 1 + \left(x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x)\right)^2 = 1 + x^2 + \tfrac{2x^4}{3} + \tfrac{17x^6}{45} + x^6\varepsilon(x) \\ \tan(x) &= x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2x^5}{15} + \tfrac{17x^7}{315} + x^7\varepsilon(x) \end{aligned}$$

5. Comme on l'a vu en TD, on a $\arctan'(x) = (1 + x^2)^{-1}$. On peut donc développer $\arctan'$ à l'ordre 6, ce qui est facile : $\arctan'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^6\varepsilon(x)$, puis intégrer ce développement sans oublier la constante d'intégration $\arctan(0) = 0$. On obtient ainsi

$$\arctan(x) = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^7}{7} + x^7\varepsilon(x)\ .$$

L'autre méthode est plus compliqué sur cet exemple, mais mérite d'être connue car elle se généralise mieux. Comme arctan est impaire, son développement à l'ordre 7 en 0 s'écrit sous la forme $\arctan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + x^7\varepsilon(x)$, pour certaines valeurs de a, b, c, et d à déterminer. Pour celà, on utilise le fait que (par définition) $\arctan(\tan(x)) = x$. On a ainsi

$$\begin{aligned} x &= \arctan(\tan(x)) \\ &= a\left(x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2x^5}{15} + \tfrac{17x^7}{315}\right) + b\left(x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2x^5}{15}\right)^3 + c\left(x + \tfrac{x^3}{3}\right)^5 + d\,(x)^7 + x^7\varepsilon(x) \\ &= ax + \left(\tfrac{a}{3} + b\right)x^3 + \left(\tfrac{2a}{15} + b + c\right)x^5 + \left(\tfrac{17a}{315} + \tfrac{11b}{15} + \tfrac{5c}{3} + d\right)x^7 + x^7\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité on peut identifier terme à terme les deux membres de cette égalité. On obtient alors $a = 1$, $\frac{a}{3} + b = 0$, $\frac{2a}{15} + b + c = 0$, $\frac{17a}{315} + \frac{11b}{15} + \frac{5c}{3} + d = 0$. C'est un brave système linéaire, qui a même le bon goût d'être échelonné, et qu'on résoud donc facilement, obtenant ainsi $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{5}$, $d = -\frac{1}{7}$.

Exercice 3

1. On applique la formule de TAYLOR pour obtenir le développement de g à l'ordre 3 en 0, on a $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ (après simplifitation des expressions de l'énoncé). On calcule par ailleurs le développement de f à l'ordre 3 en 0, il vient :

$$f(x) = (4 + 4x + x^2)(x - \tfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)) = 4x + 4x^2 + \tfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \ .$$

Il ne reste alors qu'à composer ces deux développements pour obtenir celui de $f \circ g$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \tfrac{1}{2}\left(4 + 4x + \tfrac{x^3}{3}\right) + \tfrac{1}{2}(4x + 4x)^2 + \tfrac{1}{6}(4x)^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 2x + 3x^2 + \tfrac{65x^3}{24} + x^3\varepsilon(x) \ ,\end{aligned}$$

et finalement par dérivation :

$$(f \circ g)'(x) = 2 + 6x + \tfrac{65x^2}{8} + x^2\varepsilon(x) \ .$$

Exercice 4

1. On a :

$$\begin{aligned}f(x) &= \left((x - \sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{2}\right)^2 - 2 \\ &= 3\sqrt[3]{2}^2(x - \sqrt[3]{2}) + 2\sqrt[3]{2}(x - \sqrt[3]{2})^2 + (x - \sqrt[3]{2})^3 + x^3\varepsilon(x) \ .\end{aligned}$$

La fonction ε qui apparaît ici est en fait la fonction nulle, car la fonction est un poynôme de degré inférieur ou égal à l'ordre de développement.

2. On calcule directement

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|x - \sqrt[3]{2}\right| \cdot \left|3\sqrt[3]{2}^2 + 3\sqrt[3]{2}(x - \sqrt[3]{2}) + (x - \sqrt[3]{2})^2\right| \\ &\leqslant \left|x - \sqrt[3]{2}\right| \cdot (3\sqrt[3]{2}^2 + 3\left|\sqrt[3]{2}(x - \sqrt[3]{2}\right| + \left|x - \sqrt[3]{2}\right|^2) \\ &\leqslant B\left|x - \sqrt[3]{2}\right| \ ,\end{aligned}$$

sous l'hypothèse que $\left|x - \sqrt[3]{2}\right| < 1$.

3. On a immédiatemment $f(r) = \frac{p^3 - 2q^3}{q^3}$. C'est donc un nombre rationel, qui admet q^3 comme dénominateur. Comme un éventuelle simplification ne ferait que diminuer son dénominateur, on peut affirmer que $f(\frac{p}{q})$ est de dénominateur inférieur ou égal à q^3.

4. On admet que $f(r) \neq 0$, c'est-à-dire que $p^3 - 2q^3 \neq 0$. Mais alors $\left|p^3 - 2q^3\right|$ est un entier non nul, donc supérieur à 1. On a donc $|f(r)| \geqslant \pm rac1q^3$.

5. On raisonne par disjonction de cas sur $\left|x - \sqrt[3]{2}\right|$. Si cette quantité est inférieur à 1, on déduit des deux questions précédentes que

$$\left|x - \sqrt[3]{2}\right| \cdot B \geqslant |f(x)| \geqslant \tfrac{1}{q^3} \ .$$

Si elle est supérieure à 1, elle est *a fortiori* supérieure à $\frac{1}{q^3}$. On a donc bien montré la résultat demandé dans tous les cas.