Université Pierre et Marie Curie 2007–2008

LM110 — Fonctions

Devoir 1

Exercice 1. On considère la fonction définie par

$$f(x) = -\ln(|\cos(x)|) \ .$$

1. Donner son domaine de définition.
2. Après avoir étudié sa parité et sa périodicité, expliquer pourquoi il suffit de l'étudier sur $[0; \pi/2[$. Remarquer qu'on peut simplifier son expression sur cet intervalle.
3. Justifier soigneusement que f est dérivable partout où elle est définie et calculer sa dérivée sur son ensemble de définition.
4. Étudier son sens de variation sur $[0; \pi/2[$ (au moins deux méthodes possibles). En déduire ses variations sur tout son ensemble de définition.
5. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Trouver toutes les asymptotes à $\mathcal{C}$.
6. Calculer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x_0 = \pi/4$. Donner un développement limité de f à l'ordre 1 en x_0.
7. Calculer un développement limité à l'ordre 6 de f en 0. On pourra expliquer préalablement pourquoi il suffit pour cela de connaître le développement limité de ln en 1 à l'ordre 3 seulement.
8. Tracer la courbe représentative de f sur $]-\pi/2; \pi/2[$. (Éléments appréciés : choix du repère et des échelles, utilisation des tangentes et asymptotes.)
9. Démontrer que f induit une bijection de $[0, \pi/2[$ sur $[0; +\infty[$.
10. On note g sa réciproque. Donner l'ensemble de définition de g, dire sur quel ensemble g est dérivable, puis calculer sa dérivée.

Exercice 2. Développements de tan et arctan.

1. Exprimer $\tan'(x)$ en fonction de $\tan(x)$.
2. En déduire un développement limité de tan à l'ordre 1 en 0, en $\pi/4$, en $\pi/3$.
3. À l'aide de l'égalité de question 1, déduire du développement de tan à l'ordre 1 en 0 un développement de $\tan'$ à l'ordre 2, puis de tan à l'ordre 3 (toujours en 0).
4. En itérant la méthode précédente, donner le développement limité de tan en 0 à l'ordre 7.

5. Calculer le développement d'arctan en 0 à l'ordre 7 par deux méthodes différentes (on peut par exemple utiliser le développement de tan obtenu à l'instant, ou bien commencer par calculer la dérivée d'arctan).

Exercice 3. On considère la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (2+x)^2 \cdot \sin(x)$, et une fonction $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant :

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = (\sin\frac{\pi}{4})^2, \quad g''(0) = (\tan\frac{\pi}{4})^2, \quad g'''(0) = \frac{6}{\pi}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) \ .$$

Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $(g \circ f)'$.

Exercice 4. Un cas particulier du thèorème de Liouville (1844).

On considère la fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 2$.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de f en $\sqrt[3]{2}$. Que peut-on dire de la fonction ε qui apparaît dans cette formule ?
2. On pose $B = 3\sqrt[3]{2}^2 + 3\sqrt[3]{2} + 1$ jusqu'à la fin de l'exercice. Par ailleurs, pour cette question, on suppose que $\left|x - \sqrt[3]{2}\right| < 1$. Montrer que $|f(x)| \leqslant B \cdot \left|x - \sqrt[3]{2}\right|$. (On pensera à factoriser $x - \sqrt[3]{2}$ dans le développement limité précédent avant d'utiliser l'inégalité triangulaire.)
3. On considère $r = p/q$ un nombre rationnel quelconque ($p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$). Démontrer que $f(r)$ est un nombre rationnel dont le dénominateur vaut au plus q^3.
4. En déduire que $|f(r)| \geqslant 1/q^3$ (on pourra admettre que $f(r) \neq 0$).
5. Démontrer alors le résultat suivant : pour tout nombre rationnel $r = p/q$, on a

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt[3]{2}\right| \geqslant \frac{1}{Bq^3} \ .$$