Approximation diophantienne dans les variétés abéliennes

Manuel Pégourié-Gonnard

Université Pierre et Marie Curie

Soutenance de thèse
22 octobre 2012
(version corrigée)

Théorème de Roth

Théorème

Soient $\xi \in \mathbf{R}$ un nombre algébrique et $\varepsilon > 0$ un réel. Il n'existe qu'un nombre fini d'entiers p et q tels que

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < |q|^{-2-\varepsilon} \ .$$

- Version quantitative : connue.
- Version effective : problème ouvert.

Théorème de Roth étendu

Théorème (Ridout)

Soit $\xi \in \overline{\mathbf{Q}}$ un nombre algébrique. Soient par ailleurs $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}$, étendues de façon arbitraire à $\boldsymbol{k}(\xi)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de points $x \in \boldsymbol{k}$ tels que

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} |x - \xi|_v^{\Delta_v} < H_2(x)^{-2-\varepsilon}$$

où $\Delta_v = [\boldsymbol{k}(\xi)_v : \mathbf{Q}_v]/[\boldsymbol{k}(\xi) : \mathbf{Q}]$ et chaque valeur absolue est normalisée de façon à prolonger une des valeurs absolues usuelles de $\mathbf{Q}$.

Théorème du sous-espace

Théorème (Schmidt, Schlickewei)

Soient n un entier et $L_0, \ldots, L_n \in \overline{\mathbf{Q}}[X_0, \ldots, X_n]$ des formes linéaires indépendantes. Soient par ailleurs $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de places de $\boldsymbol{k}$, étendues de façon arbitraire à $\boldsymbol{k}(L_0, \ldots, L_n)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des points $x \in \mathbf{P}^n(\boldsymbol{k})$ tels que

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{|L_i(x)|_v}{\|x\|_v} \right)^{\Delta_v} < H_2(x)^{-n-1-\varepsilon}$$

est contenue dans une union finie de sous-variété linéaires strictes de $\mathbf{P}^n$.

Ex-conjecture de Mordell

Théorème (Faltings 1983)

Soient C une courbe projective de genre $g \geqslant 2$ et $\boldsymbol{k}$ un corps de nombres. Alors $C(\boldsymbol{k})$ est fini.

- Autre démonstration indépendante : Vojta 1991.
- Versions quantitatives : Rémond 2002, Farhi 2003.

Ex-conjecture de Mordell-Lang

Théorème (Faltings 1991, théorème I)

Soit V une sous-variété d'une variété abélienne $\mathcal{A}$ définie sur un corps de nombres $\boldsymbol{k}$. Si V ne contient pas de translaté de sous-variété abélienne non nulle, alors $V(\boldsymbol{k})$ est fini.

- Version quantitative : Rémond 2002.

Approximation sur les variété abéliennes

Théorème (Faltings 1991, théorème II)

Soit V une sous-variété quelconque de $\mathcal{A}$, v une place de $\boldsymbol{k}$, et $\varepsilon > 0$. Il n'existe qu'un nombre fini de points x dans $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ tels que

$$0 < \operatorname{dist}_v(x, V) \leqslant H(x)^{-\varepsilon} \,.$$

Corollaire (Ex-conjecture de Lang)

Soit $\mathcal{A}$ une variété abélienne plongée dans $\mathbf{P}^n$ et E un hyperplan de $\mathbf{P}^n$. Alors $\mathcal{A} \setminus E$ ne possède qu'un nombre fini de points entiers.

Versions quantitatives

- Cas des courbes elliptiques : Gross-Silverman 1995, Farhi 2003, Wagener 2012.
- Cas général (avec restrictions) : MPG 2012.

Multiplication des approximations exceptionnelles

Proposition

Soit $\mathcal{B}$ une sous-variété abélienne et $V = Z + \mathcal{B}$. On considère $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathcal{E}(V, \varepsilon) \cap \Gamma$. De plus, on note $\hat{h}_{\inf}(\mathcal{B} \cap \Gamma)$ l'infemum de $\hat{h}(y)$ lorsque y parcourt l'ensemble des points d'ordre infini de $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma$, ou $+\infty$ si cet ensemble est vide.
Pour tout $0 < \tau \leqslant 1$, il existe $\varepsilon' > 0$ explicite tel que l'ensemble $\mathcal{E}(V, \varepsilon') \cap \Gamma$ contient au moins

$$\mathrm{Card}\left(\mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}})_{\mathrm{tor}} \cap \Gamma\right) \left(2 \left\lfloor \sqrt{\tau \hat{h}(x) / \hat{h}_{\inf}(\mathcal{B} \cap \Gamma)} \right\rfloor + 1\right)$$

points de hauteur normalisée supérieure ou égale à $(1 - \sqrt{\tau})^2\, \hat{h}(x)$ (avec la convention $(+\infty)^{-1} = 0$).

Obstruction au décompte explicite

Corollaire

Soit $\mathcal{B}$ une sous-variété abélienne et $V = Z + \mathcal{B}$. Supposons que pour un certain $\varepsilon_0 > 0$ et un certain Γ de type fini, il existe R et N tels que

$$\mathrm{Card}\{x \in \mathcal{E}(V, \varepsilon_0) \cap \Gamma \text{ tel que } \hat{h}(x) \geqslant R\} \leqslant N .$$

Alors, pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, il existe $B = B\big(\varepsilon_0, R, N, \hat{h}_{\min}(\mathcal{B} \cap \Gamma)\big)$ explicite tel que les points de $\mathcal{E}(V, \varepsilon) \cap \Gamma$ sont tous de hauteur normalisée inférieure à B.

Conditions pour le décompte

Soient $F \subset \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ un sous-ensemble et $\tau > 0$ un réel.

Définition

On dit que F satisfait $\overline{\mathrm{C}}_1(\tau,\varepsilon)$ s'il existe deux points distincts x et y dans F et $\mathcal{B}$ une sous-variété abélienne telle que $x \in \mathcal{E}((V:\mathcal{B}),\varepsilon)$ avec $x-y \in \mathcal{B}$ et $\hat{h}(x-y) \leqslant \tau\hat{h}(x)$.
On dit que F satisfait $\mathrm{C}_1(\tau,\varepsilon)$ si F ne satisfait pas $\overline{\mathrm{C}}_1(\tau,\varepsilon)$.

Définition

On dit que F satisfait $\overline{\mathrm{C}}(\tau)$ s'il existe une sous-variété abélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ dont un translaté est contenu dans V et deux points distincts x et y dans F, tels que $x-y \in \mathcal{B}$ et $\hat{h}(x-y) \leqslant \tau\hat{h}(x)$.
On dit que F satisfait la condition $\mathrm{C}(\tau)$ si F ne satisfait pas $\overline{\mathrm{C}}(\tau)$.

Cas d'un translaté de sous-variété abélienne

Théorème

Soient $V = z + \mathcal{B}$ et une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et telle que pour tout i,

$$0 < \operatorname{dist}_v(x_i, V) < \omega_v H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \ \forall v \quad \textit{et } \hat{h}(x_i) > \omega \Lambda^{(4g)^{4g^2}}$$

avec $\sum \lambda_v \Delta_v = 1$ et certains ω_v tels que $\prod \omega_v \leqslant \omega$, ainsi que

$$\Lambda = 34\varepsilon^{-2}\left(5(\deg \mathcal{A})(3g^2 d)^g\right)^{2g+2}$$

$$\omega = d^{g+1} c_{\mathcal{A}} + (g+1) \deg \mathcal{A}\left(d^g h_1(V) + 2\left(2(d+1)\right)^{n+1}\right)$$

Alors on a

$$p \leqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} (4g)^{4g^2+1} (\log \Lambda) \left(120760 (\deg \mathcal{A}) d\, \varepsilon^{-1}\right)^r \ .$$

Cas d'un translaté de sous-variété abélienne

Théorème

Soient $V = z + \mathcal{B}$ et une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et telle que pour tout i,

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon} \quad \textit{et } \hat{h}(x_i) > \omega \Lambda^{(4g)^{4g^2}}$$

avec

$$\Lambda = 34\varepsilon^{-2}\big(5(\deg \mathcal{A})(3g^2 d)^g\big)^{2g+2}$$
$$\omega = d^{g+1} c_{\mathcal{A}} + (g+1) \deg \mathcal{A}\Big(d^g h_1(V) + 2\big(2(d+1)\big)^{n+1}\Big)$$

Alors on a

$$p \leqslant 2 \cdot 5^{\mathrm{Card}\, \mathcal{S}} \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} (4g)^{4g^2+1} (\log \Lambda) \left(120760 (\deg \mathcal{A}) d\, \varepsilon^{-1}\right)^r .$$

Cas d'un translaté de sous-variété abélienne

Théorème

Soient $V = z + \mathcal{B}$ et une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\varepsilon/2d)$ et telle que pour tout i,

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \operatorname{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon} \exp\left(-d\omega\Lambda^{(4g)^{4g^2}}\right)$$

avec

$$\Lambda = 34\varepsilon^{-2}\Big(5(\deg \mathcal{A})(3g^2 d)^g\Big)^{2g+2}$$

$$\omega = d^{g+1} c_{\mathcal{A}} + (g+1) \deg \mathcal{A}\Big(d^g h_1(V) + 2\big(2(d+1)\big)^{n+1}\Big)$$

Alors on a

$$p \leqslant 2 \cdot 5^{\operatorname{Card} \mathcal{S}} \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} (4g)^{4g^2+1} (\log \Lambda) \left(120760 (\deg \mathcal{A}) d\, \varepsilon^{-1}\right)^r .$$

Cas général

Théorème

Soit une famille $x_1, \ldots, x_p$ de points de $\mathcal{A}(\boldsymbol{k})$ satisfaisant à $C(\frac{\varepsilon}{d^M (2M)^{(M+1)u}})$ et telle que

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x_i, V)^{\Delta_v} < H_2(x_i)^{-\varepsilon}$$

$$\hat{h}(x_i) > (h_1(V) + c_{\mathcal{A}})\, \varepsilon^{-2(4g)^{4g^2}} d^M (3M)^{(M+1)u+3}$$

pour tout i, avec $M = \left(2^{34}\, c'_{\mathcal{A}}\, d\right)^{(r+1)g^{5(u+1)^2}} + 1$. Alors on a

$$p \leqslant 5^{\mathrm{Card}\,\mathcal{S}} M^2 \left(d^M (3M)^{(M+1)u}\right)^{(r+1)/2} \varepsilon^{-r-1/2} \log(\mathrm{e}/\varepsilon)\ .$$

Idée rayonnante de Vojta

- Séparation en petits points et grands points.
- Séparation des grands points en cônes.
- Inégalité de Vojta pour la finitude.
- Inégalités de Vojta et Mumford explicites pour le décompte.

Inégalité de ...

Il n'existe pas de famille d'approximations exceptionnelles $(x_1, \ldots, x_m)$, pour m assez grand, telle que

Vojta

- $\hat{h}(x_1) \geqslant \alpha_{\mathrm{V}}$
- $\cos(x_i, x_j) \geqslant 1 - \gamma_{\mathrm{V}}$
- $\hat{h}(x_i) \geqslant \beta_{\mathrm{V}} \hat{h}(x_{i-1})$

Mumford

- $\hat{h}(x_1) \geqslant \alpha_{\mathrm{M}}$
- $\cos(x_i, x_j) \geqslant 1 - \gamma_{\mathrm{M}}$
- $\hat{h}(x_1) \leqslant \hat{h}(x_i) \leqslant \beta_{\mathrm{M}} \hat{h}(x_1)$

Inégalité de Vojta

Théorème

Il n'existe dans $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ *aucune famille de points* $x_1, \dots, x_m$ *avec* $m \geqslant g+1$ *satisfaisant simultanément aux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} 0 < \mathrm{dist}_v(x_i, V) &< \omega_v^{-1} H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_1) &> \omega \Lambda_4^{(2mg)^{mg}} \\ \hat{h}(x_i) &> \hat{h}(x_{i-1}) \cdot \Lambda_4^{(2mg)^{mg}} \\ \cos(x_i, x_j) &> 1 - (m\,\eta)^{-1} \end{aligned}$$

avec certains ω_v *tels que* $\prod \omega_v \leqslant \omega$ *et*

$$\eta = \left(86N \cdot 5^g d\varepsilon^{-1}\right)^{\frac{m}{m-g}} \qquad \Lambda_4 = \eta\left((\sqrt{2}mgd)^g \deg \mathcal{A}\right)^m$$

$$\omega = d \max\left(d^g h_1(\mathcal{A}), c_\Theta, \hat{c}_\Theta\right) + (g+1) \deg \mathcal{A}\left(d^g h_1(V) + (4d)^{n+2}\right)$$

Inégalité de Mumford
Cas des translatés de sous-variété abélienne

Théorème

Soient $\phi > 0$ et $\rho > 0$ tels que

$$\frac{\rho^2}{4} + \rho\phi + 2\phi \leqslant \frac{\varepsilon}{2d} \, .$$

Si x et y sont deux points de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que

$$0 < \operatorname{dist}_v(z, V) \leqslant H_2(z)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \quad \textit{où } z \textit{ est } x \textit{ ou } y$$

$$\hat{h}(x) > \frac{2}{\varepsilon} d(u+1) \Big(\log(d) + (2 + \frac{\varepsilon}{d})\hat{c}_\Theta + 2c'_\Theta + 11 \log(n+1) \Big)$$

$$\cos(x,y) \geqslant 1 - \phi$$

$$\hat{h}(x) \leqslant \hat{h}(y) \leqslant (1+\rho)\hat{h}(x)$$

alors $x - y \in \mathcal{B}(\overline{\mathbf{Q}})$.

Inégalité de Mumford — Cas général

Théorème

Soient $\phi > 0$ et $\rho > 0$, on note $\tau = \rho^2/4 + \rho\phi + 2\phi$ et on suppose

$$\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{d^m (2m)^{(m+1)u}} \quad \text{avec } m = \left(2^{34}\, h^0_{\mathcal{A}}\, d\right)^{(r+1)g^{5(u+1)^2}} + 1\ .$$

Si $x_1, \ldots, x_m$ est une famille de points de Γ telle que

$$0 < \operatorname{dist}_v(x_i, V) \leqslant H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S}$$

$$\hat{h}(x_m) \geqslant \frac{4}{\varepsilon} d^{m-1} (2m)^{(m+1)u+1} \Big(h_1(V) + 4dm \big(\log d + c'_\Theta + \hat{c}_\Theta \big) \Big)$$

$$\cos(x_i, x_j) \geqslant 1 - \phi$$

$$\hat{h}(x_m) \leqslant \hat{h}(x_i) \leqslant (1+\rho) \hat{h}(x_m)$$

alors $\{x_1, \ldots, x_m\}$ satisfait $\overline{\mathrm{C}}(\tau)$.

Par cône tronqué

Lemme

Soit $x_1, \dots, x_p$ *une famille de points de* Γ *satisfaisant* $C(\tau)$ *et*

$$\begin{aligned} 0 < \mathrm{dist}_v(x_i, V) \leqslant H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S} \\ \hat{h}(x_i) \geqslant \alpha \\ \cos(x_i, x_j) \geqslant 1 - \gamma \end{aligned}$$

avec $\alpha = \max(\alpha_{\mathrm{V}}, \alpha_{\mathrm{M}})$ *et* $\gamma = \min(\gamma_{\mathrm{V}}, \gamma)$*. Alors on a*

$$p \leqslant (m-1) \left\lceil \frac{\ln \beta_{\mathrm{V}}}{\ln \beta_{\mathrm{M}}} \right\rceil .$$

Tous les grands points

Fait

Soient r un entier et $\gamma > 0$ un réel. On peut recouvrir $\mathbf{R}^r$ par $\lfloor (1+\sqrt{8/\gamma})^r \rfloor$ ensembles dans chacun desquels deux points quelconques satisfont $\cos(x,y) \geqslant 1-\gamma$.

Lemme

Soit $x_1, \ldots, x_p$ une famille de points de Γ satisfaisant $C(\tau)$ et

$$0 < \operatorname{dist}_v(x_i, V) \leqslant H_2(x_i)^{-\lambda_v \varepsilon} \quad \forall v \in \mathcal{S}$$
$$\hat{h}(x_i) \geqslant \alpha$$

Alors on a

$$p \leqslant (m-1) \left\lceil \frac{\ln \beta_{\mathrm{V}}}{\ln \beta_{\mathrm{M}}} \right\rceil (1+\sqrt{8/\gamma})^r \; .$$

Décompte trivial des petits points

Fait

Soient E un espace euclidien de dimension r et deux réels ρ et μ. On peut recouvrir toute boule (fermée) de rayon ρ par des boules (ouvertes) de rayon μ en nombre inférieur à $(2\,\frac{\rho}{\mu}+1)^r$.

Corollaire

Soit Γ un sous-groupe de type fini de $\mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$; on note r le rang de Γ et $\hat{h}_{\min}(\Gamma)$ le minimum de $\hat{h}(x)$ quand x parcourt l'ensemble des points d'ordre infini de Γ. Pour tout réel positif R, on a

$$\mathrm{Card}\Big\{x\in\Gamma \text{ tel que } \hat{h}(x)\leqslant R\Big\}\leqslant \mathrm{Card}\,\Gamma_{\mathrm{tor}}\left(1+2\sqrt{R/\hat{h}_{\min}(\Gamma)}\right)^r$$

où Γ_{tor} désigne l'ensemble des points de torsion de Γ.

Inégalité de Liouville

Proposition

Pour tout point $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$, *on a soit* $x \in V(\overline{\mathbf{Q}})$ *soit*

$$\prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x, V)^{\Delta_v} \geqslant \frac{1}{(n+1)^{3/2}(3d)^{d(u+1)}\, H_1(V)\, H_2(x)^d} \ .$$

Corollaire

Si R *est un réel supérieur ou égal à*

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(h_1(f_V) + d(u+1)\log(3d) + \frac{3}{2}\log(n+1) + d\hat{c}_\Theta\right) \ ,$$

il n'existe aucun point $x \in \mathcal{A}(\overline{\mathbf{Q}})$ *tel que*

$$0 < \prod_{v \in \mathcal{S}} \mathrm{dist}_v(x, V)^{\Delta_v} \leqslant \mathrm{e}^{-dR} H_2(x)^{-\varepsilon} \quad \textit{et} \quad \hat{h}(x) \leqslant R \ .$$