Qu'est-ce que l'approximation diophantienne ?

Manuel Pégourié-Gonnard

Équipe « Géométrie et Dynamique »
Institut de Mathématiques de Jussieu

Groupe de moniteurs du 11 janvier 2006

Plan

Un exemple significatif : l'approximation des algébriques réels par les rationnels

Les caractéristiques d'un problème diophantien

Quelques résultats et problèmes ouverts

Plan

Un exemple significatif : l'approximation des algébriques réels par les rationnels

Les caractéristiques d'un problème diophantien

Quelques résultats et problèmes ouverts

Idée du problème

Par définition, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$...

Mais approcher précisément un réel par un rationnel « a un prix » : le rationnel utilisé s'écrira avec de gros entiers.

L'approximation diophantienne cherche à préciser ce constat.

Définitions

Dans toute la suite, α sera un nombre algébrique réel, non rationnel, quelconque mais fixé. On peut voir tout rationnel r comme une approximation de α, pour laquelle on définit les quantités suivantes :

Un nombre est dit algébrique s'il est solution d'un équation pôlynomiale à coefficients entiers.

Définitions

Dans toute la suite, α sera un nombre algébrique réel, non rationnel, quelconque mais fixé. On peut voir tout rationnel r comme une approximation de α, pour laquelle on définit les quantités suivantes :

- précision : $p(r) = -\log|\alpha - r|$,

qui est *modo grosso* le nombre de bits coïncidant entre des écritures en virgule flottante de r et α.

Définitions

Dans toute la suite, α sera un nombre algébrique réel, non rationnel, quelconque mais fixé. On peut voir tout rationnel r comme une approximation de α, pour laquelle on définit les quantités suivantes :

- précision : $p(r) = -\log|\alpha - r|$,
- prix : $h(r) = \log\max(|a|, |b|)$,

où a/b est une représentation de r en fraction irréductible.
C'est le nombre minimal de bits sur lequel il faut coder les entiers pour pouvoir représenter r dans un système de calcul formel.

Définitions

Dans toute la suite, α sera un nombre algébrique réel, non rationnel, quelconque mais fixé. On peut voir tout rationnel r comme une approximation de α, pour laquelle on définit les quantités suivantes :

- précision : $p(r) = -\log|\alpha - r|$,
- prix : $h(r) = \log\max(|a|, |b|)$,
- qualité : $q(r) = \frac{p(r)}{h(r)}$.

On dira qu'une approximation est bonne si elle est de qualité élevée.

Le problème

L'approximation diophantienne tente, dans ce contexte et bien d'autres, de répondre aux questions suivantes :

On présentera tout à l'heure quelques réponses en termes de localisation des approximations sur un diagramme en $p(r)$, $h(r)$.

Le problème

L'approximation diophantienne tente, dans ce contexte et bien d'autres, de répondre aux questions suivantes :

1. Existe-t'il de bonnes approximations ?

On présentera tout à l'heure quelques réponses en termes de localisation des approximations sur un diagramme en $p(r)$, $h(r)$.

Le problème

L'approximation diophantienne tente, dans ce contexte et bien d'autres, de répondre aux questions suivantes :

1. Existe-t'il de bonnes approximations ?
2. Existe-t'il des approximations arbitrairement bonnes ?

On présentera tout à l'heure quelques réponses en termes de localisation des approximations sur un diagramme en $p(r)$, $h(r)$.

Le problème

L'approximation diophantienne tente, dans ce contexte et bien d'autres, de répondre aux questions suivantes :

1. Existe-t'il de bonnes approximations ?
2. Existe-t'il des approximations arbitrairement bonnes ?
3. Si non, quelle qualité peut-on espérer atteindre ?

On présentera tout à l'heure quelques réponses en termes de localisation des approximations sur un diagramme en $p(r)$, $h(r)$.

Le problème

L'approximation diophantienne tente, dans ce contexte et bien d'autres, de répondre aux questions suivantes :

1. Existe-t'il de bonnes approximations ?
2. Existe-t'il des approximations arbitrairement bonnes ?
3. Si non, quelle qualité peut-on espérer atteindre ?
4. Combien existe-t'il au plus d'approximation exceptionnelles ?

On présentera tout à l'heure quelques réponses en termes de localisation des approximations sur un diagramme en $p(r)$, $h(r)$.

Le problème

L'approximation diophantienne tente, dans ce contexte et bien d'autres, de répondre aux questions suivantes :

1. Existe-t'il de bonnes approximations ?
2. Existe-t'il des approximations arbitrairement bonnes ?
3. Si non, quelle qualité peut-on espérer atteindre ?
4. Combien existe-t'il au plus d'approximation exceptionnelles ?
5. Peut-on les trouver toutes ?

On présentera tout à l'heure quelques réponses en termes de localisation des approximations sur un diagramme en $p(r)$, $h(r)$.

Le problème

L'approximation diophantienne tente, dans ce contexte et bien d'autres, de répondre aux questions suivantes :

1. Existe-t'il de bonnes approximations ?
2. Existe-t'il des approximations arbitrairement bonnes ?
3. Si non, quelle qualité peut-on espérer atteindre ?
4. Combien existe-t'il au plus d'approximation exceptionnelles ?
5. Peut-on les trouver toutes ?

On présentera tout à l'heure quelques réponses en termes de localisation des approximations sur un diagramme en $p(r)$, $h(r)$.

Plan

Intégrité/Rationalité

La première caractéristique d'un problème diophantien est de considérer des inconnues à valeurs entières, voire rationnelles.

Exemple : l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$.

Intégrité/Rationalité

La première caractéristique d'un problème diophantien est de considérer des inconnues à valeurs entières, voire rationnelles.

Exemple : l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$.

- On cherche a priori les solutions entières de cette équation,

Intégrité/Rationalité

La première caractéristique d'un problème diophantien est de considérer des inconnues à valeurs entières, voire rationnelles.

Exemple : l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$.

- On cherche a priori les solutions entières de cette équation,
- mais il revient au même de chercher les solutions rationnelles.

Toute solution rationnelle $(a/d)^n + (b/e)^n = (c/f)^n$ fournit une solution entière $(aef)^n + (dbf)^n = (dec)^n$.

Intégrité/Rationalité

La première caractéristique d'un problème diophantien est de considérer des inconnues à valeurs entières, voire rationnelles.

Exemple : l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$.

- On cherche a priori les solutions entières de cette équation,
- mais il revient au même de chercher les solutions rationnelles.

Dans d'autres contextes on pourra considérer :

Intégrité/Rationalité

La première caractéristique d'un problème diophantien est de considérer des inconnues à valeurs entières, voire rationnelles.

Exemple : l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$.

- On cherche a priori les solutions entières de cette équation,
- mais il revient au même de chercher les solutions rationnelles.

Dans d'autres contextes on pourra considérer :

- les entiers ou rationnels d'un corps de nombres *fixé* ;

Un corps de nombre est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$.

Intégrité/Rationalité

La première caractéristique d'un problème diophantien est de considérer des inconnues à valeurs entières, voire rationnelles.

Exemple : l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$.

- On cherche a priori les solutions entières de cette équation,
- mais il revient au même de chercher les solutions rationnelles.

Dans d'autres contextes on pourra considérer :

- les entiers ou rationnels d'un corps de nombres *fixé* ;
- les points entiers ou rationnels de courbes ou variétés algébriques.

Ainsi l'équation de Fermat définit une courbe dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$.

La notion de hauteur

La deuxième caractéristique d'un problème diophantien est la notion de hauteur : ici, c'est tout simplement le « prix » de l'approximation, que l'on a définit de façon naïve.

La notion de hauteur

La deuxième caractéristique d'un problème diophantien est la notion de hauteur : ici, c'est tout simplement le « prix » de l'approximation, que l'on a définit de façon naïve.

Plus généralement on peut définir la hauteur *via* deux points de vue équivalents :

La notion de hauteur

La deuxième caractéristique d'un problème diophantien est la notion de hauteur : ici, c'est tout simplement le « prix » de l'approximation, que l'on a définit de façon naïve.

Plus généralement on peut définir la hauteur *via* deux points de vue équivalents :

1. Par les polynômes (point de vue géométrique) :
   Ceci permet de définir la hauteur pour :

La notion de hauteur

La deuxième caractéristique d'un problème diophantien est la notion de hauteur : ici, c'est tout simplement le « prix » de l'approximation, que l'on a définit de façon naïve.

Plus généralement on peut définir la hauteur *via* deux points de vue équivalents :

1. Par les polynômes (point de vue géométrique) :
   Ceci permet de définir la hauteur pour :
   - un nombre algébrique (par son polynôme minimal),

Ici le polynôme minimal de r est de la forme $bX - a$ et on retrouve la définition précédente.

La notion de hauteur

La deuxième caractéristique d'un problème diophantien est la notion de hauteur : ici, c'est tout simplement le « prix » de l'approximation, que l'on a définit de façon naïve.

Plus généralement on peut définir la hauteur *via* deux points de vue équivalents :

1. Par les polynômes (point de vue géométrique) :
   Ceci permet de définir la hauteur pour :
   - un nombre algébrique (par son polynôme minimal),
   - une hypersurface algébrique (par l'équation la définissant).

La notion de hauteur

La deuxième caractéristique d'un problème diophantien est la notion de hauteur : ici, c'est tout simplement le « prix » de l'approximation, que l'on a définit de façon naïve.

Plus généralement on peut définir la hauteur *via* deux points de vue équivalents :

1. Par les polynômes (point de vue géométrique) :
   Ceci permet de définir la hauteur pour :
   - un nombre algébrique (par son polynôme minimal),
   - une hypersurface algébrique (par l'équation la définissant).
2. Par les valuations (point de vue arithmétique).

Les valuations d'un rationnel traduisent les exposants intervenant dans sa décomposition en facteurs premiers.

La notion de hauteur

La deuxième caractéristique d'un problème diophantien est la notion de hauteur : ici, c'est tout simplement le « prix » de l'approximation, que l'on a définit de façon naïve.

Plus généralement on peut définir la hauteur *via* deux points de vue équivalents :

1. Par les polynômes (point de vue géométrique) :
   Ceci permet de définir la hauteur pour :
   - un nombre algébrique (par son polynôme minimal),
   - une hypersurface algébrique (par l'équation la définissant).
2. Par les valuations (point de vue arithmétique).

Ainsi la hauteur, conjuguant significations géométriques et arithmétiques, est l'outil diophantien par excellence.

Propriétés fondamentales

Nous venons d'énoncer les caractéristiques d'un problème diophantien, voyons maintenant leurs propriétés fondamentales :

1. Intégrité/Rationalité

2. Notion de hauteur

Propriétés fondamentales

Nous venons d'énoncer les caractéristiques d'un problème diophantien, voyons maintenant leurs propriétés fondamentales :

1. Intégrité/Rationalité
   - Principe de saut :
     il n'y a pas d'entier strictement entre 0 et 1.
2. Notion de hauteur

Propriétés fondamentales

Nous venons d'énoncer les caractéristiques d'un problème diophantien, voyons maintenant leurs propriétés fondamentales :

1. Intégrité/Rationalité
   - Principe de saut :
     il n'y a pas d'entier strictement entre 0 et 1.
2. Notion de hauteur
   - Propriété de finitude :
     l'ensemble des points de hauteur bornée est fini.

Propriétés fondamentales

Nous venons d'énoncer les caractéristiques d'un problème diophantien, voyons maintenant leurs propriétés fondamentales :

1. Intégrité/Rationalité
   - Principe de saut :
     il n'y a pas d'entier strictement entre 0 et 1.
2. Notion de hauteur
   - Propriété de finitude :
     l'ensemble des points de hauteur bornée est fini.
   - Signification arithmétique et géométrique.

Plan

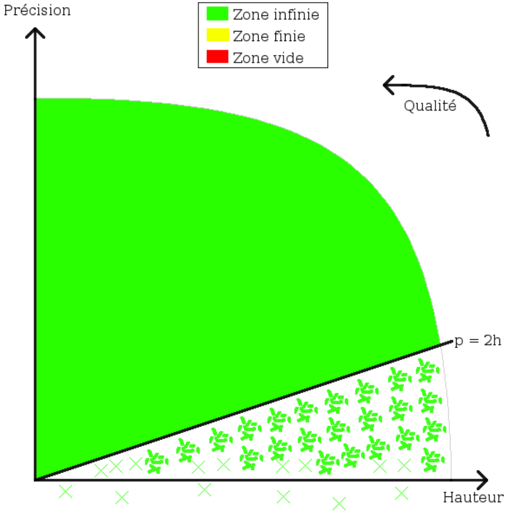
Le problème

L'approximation diophantienne tente, dans ce contexte et bien d'autres, de répondre aux questions suivantes :

1. Existe-t'il de bonnes approximations ?
2. Existe-t'il des approximations arbitrairement bonnes ?
3. Si non, quelle qualité peut-on espérer atteindre ?
4. Combien existe-t'il au plus d'approximation exceptionnelles ?
5. Peut-on les trouver toutes ?

On présentera tout à l'heure quelques réponses en termes de localisation des approximations sur un diagramme en $p(r)$, $h(r)$.

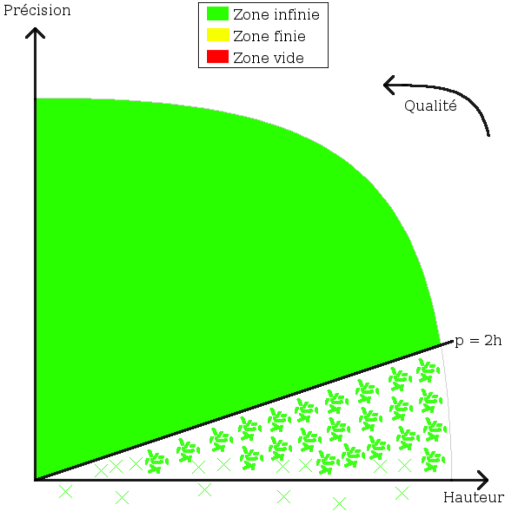
Dirichlet



Dirichlet, 1842

On n'a en fait pas besoin de supposer α algébrique.

Dirichlet

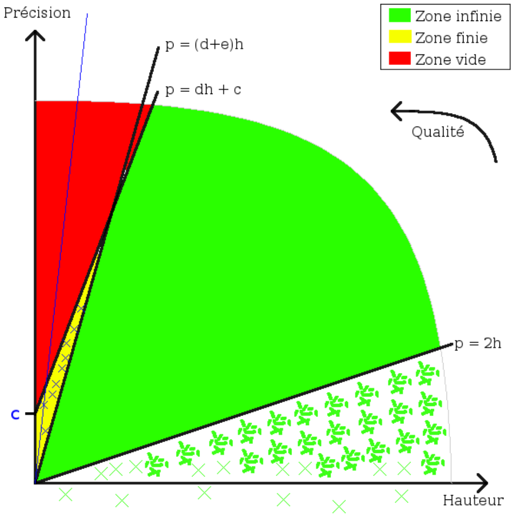


Dirichlet, 1842

On n'a en fait pas besoin de supposer α algébrique.

La théorie des fractions continues permet d'écrire effectivement une suite infinie d'approximations de qualité supérieure à 2.

Liouville

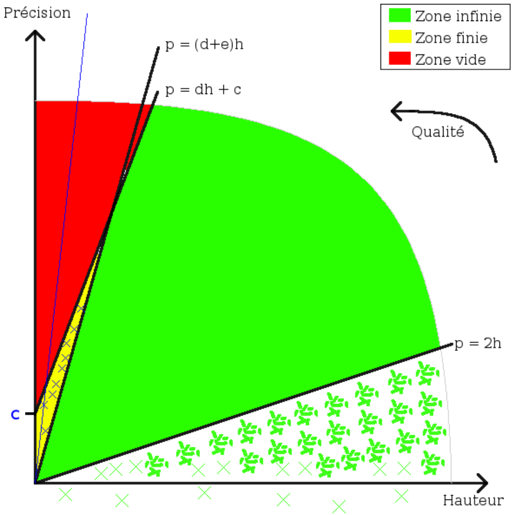


Liouville, 1844

$\exists\ c = c(\alpha)$ telle que
le dessin est juste.

$d = \deg(\alpha)$,
$e = \varepsilon > 0$ quelconque,

Liouville



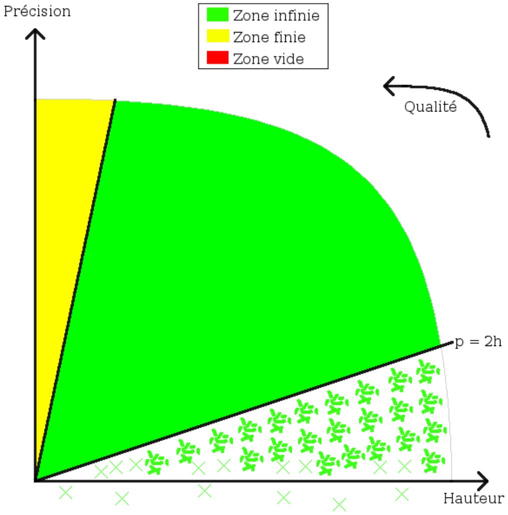
Liouville, 1844

$\exists\ c = c(\alpha)$ telle que le dessin est juste.

$d = \deg(\alpha)$,
$e = \varepsilon > 0$ quelconque,

La constante $c(\alpha)$ est effective : on la calcule simplement à partir du polynôme minimal de α.

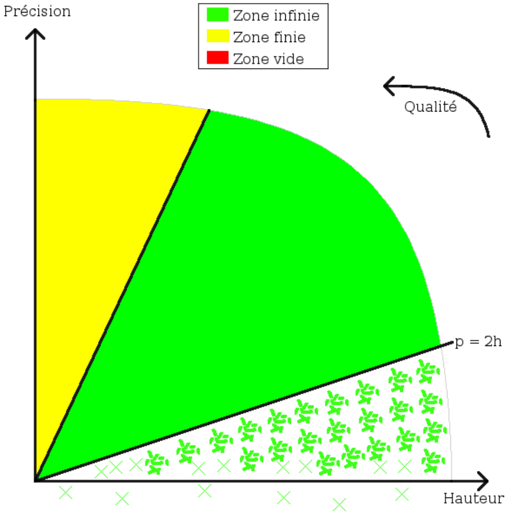
L'évolution



Liouville, 1844

$d + \varepsilon$

L'évolution



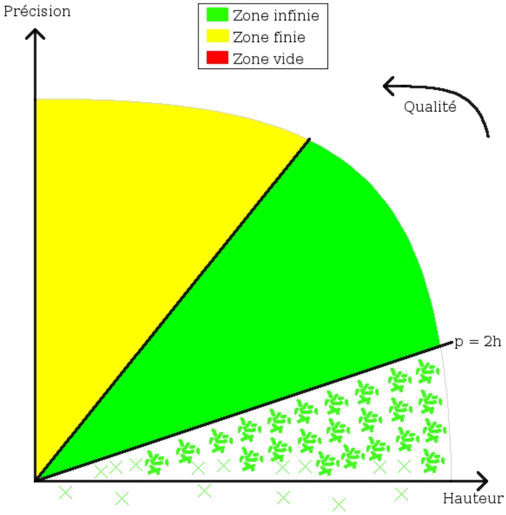
Liouville, 1844

$d + \varepsilon$

Thue, 1909

$d/2 + 1 + \varepsilon$

L'évolution



Liouville, 1844

$d + \varepsilon$

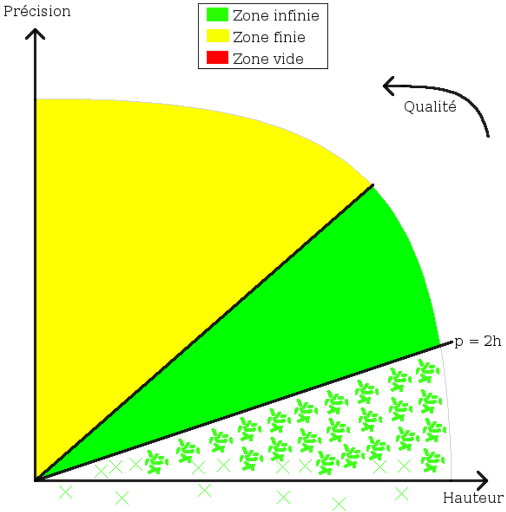
Thue, 1909

$d/2 + 1 + \varepsilon$

Siegel, 1929

$2\sqrt{d} + \varepsilon$

L'évolution



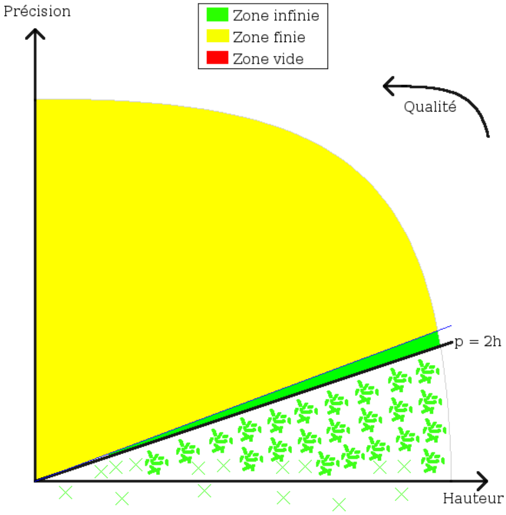
Liouville, 1844
$d + \varepsilon$

Thue, 1909
$d/2 + 1 + \varepsilon$

Siegel, 1929
$2\sqrt{d} + \varepsilon$

Dyson, 1947
$\sqrt{2d} + \varepsilon$

L'évolution



Liouville, 1844
$d + \varepsilon$

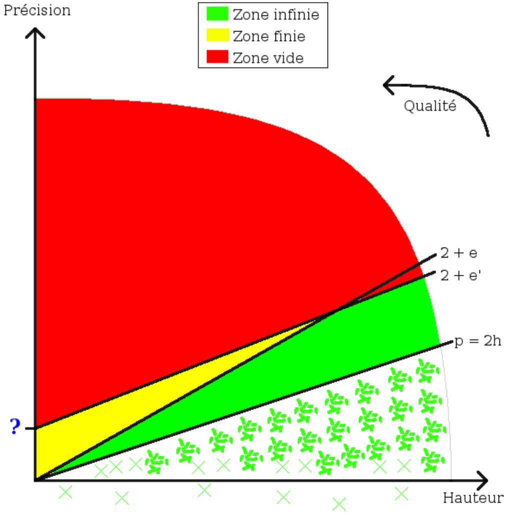
Thue, 1909
$d/2 + 1 + \varepsilon$

Siegel, 1929
$2\sqrt{d} + \varepsilon$

Dyson, 1947
$\sqrt{2d} + \varepsilon$

Roth, 1955
$2 + \varepsilon$

La situation actuelle

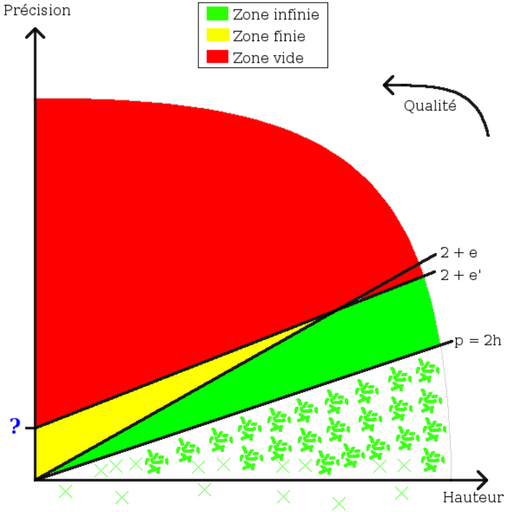


Roth, 1955

$\forall e = \epsilon > 0$, la zone orange est finie.

$\forall e = \epsilon > 0$,
$\exists c = c(\alpha, \varepsilon)$, la zone rouge est vide.

La situation actuelle



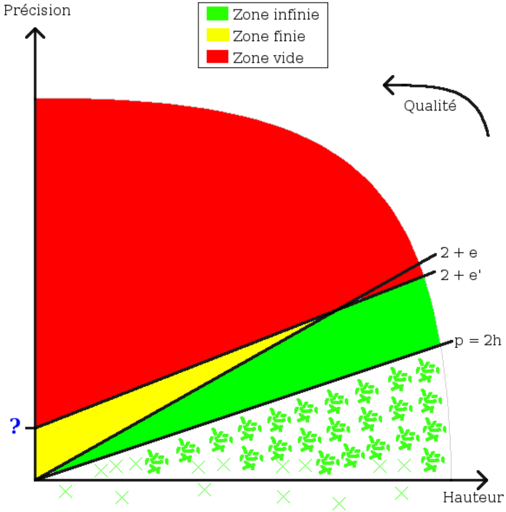
Roth, 1955

$\forall e = \epsilon > 0$, la zone orange est finie.

$\forall e = \epsilon > 0$,
$\exists c = c(\alpha, \varepsilon)$, la zone rouge est vide.

- exposant optimal

La situation actuelle



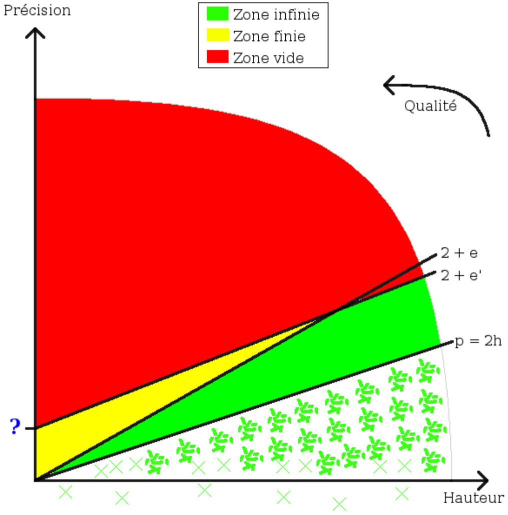
Roth, 1955

$\forall e = \epsilon > 0$, la zone orange est finie.

$\forall e = \epsilon > 0$,
$\exists c = c(\alpha, \varepsilon)$, la zone rouge est vide.

- exposant optimal
- zone orange : cardinal majoré

La situation actuelle



Roth, 1955

$\forall e = \epsilon > 0$, la zone orange est finie.

$\forall e = \epsilon > 0$,
$\exists c = c(\alpha, \varepsilon)$, la zone rouge est vide.

- exposant optimal
- zone orange : cardinal majoré
- constante $c(\alpha, \varepsilon)$: non effective