Résumé

Le but de la thèse est d'établir une version quantitative du théorème suivant : toute sous-variété d'une variété abélienne n'admet qu'un nombre fini d'approximations d'exposant strictement positif. Cet énoncé a été obtenu par Faltings en 1991 ; la majeure partie des outils qu'il utilise sont communs avec sa preuve de l'ex-conjecture de Mordell-Lang. Il implique en particulier une extension du théorème de Siegel conjecturée par Lang : toute variété abélienne n'a qu'un nombre fini de points entiers.

On utilise la méthode de Vojta en suivant les travaux de Rémond (version quantitative de Mordell-Lang) : le cœur de la thèse consiste à établir une inégalité à la Vojta explicite ; on établit ensuite une inégalité à la Mumford avant d'en déduire un décompte des approximations exceptionnelles.

Toutefois, le cas où la variété approchée contient des translatés de sous-variétés abéliennes non nulles nécessite d'imposer une condition supplémentaire pour parvenir à un décompte explicite : sans ces conditions, un tel décompte impliquerait dans certains cas un résultat effectif, qui semble hors de portée à l'heure actuelle.

Mots-clés : approximation diophantienne, variété abélienne, méthode de Vojta, inégalité de Mumford, décompte explicite.

Abstract — Diophantine approximation on abelian varieties

This thesis aims at providing a quantitative version of the following theorem : there are only finitely many approximations with positive exponent of any subvariety of an abelian variety. This theorem was proved by Faltings in 1991 using mostly the same tools as his proof of the Mordell-Lang conjecture. A corollary is the following extension of Siegel's theorem, conjectured by Lang: any abelian variety has only finitely many integral points.

We proceed with Vojta's method, following Rémond's work on a quantitative version of Mordell-Lang: the technical heart of the thesis is the proof of an explicit version of a suitable variant of Vojta's inequality ; we then establish an inequality *à la* Mumford and an explicit bound for the number of exceptional approximations follows.

However, we need an additional hypothesis to get an explicit bound when the variety considered contains translates of a positive-dimensional abelian subvariety. Indeed, in some cases, an explicit bound for the number of points would give an explicit bound for their height, which seems to be out of reach at the present time.

Keywords: diophantine approximation, abelian variety, Vojta's inequality, Mumford's inequality, explicit bound.